

FACIT Några uppgifter om formlerna för dubbla vinkeln

Uppgifterna är tänkta att lösas utan miniräknare

1. För en vinkel, v , gäller att

$$0^\circ < v < 90^\circ \text{ och } \sin(v) = \frac{1}{2}$$

Bestäm värdet av $\sin(2v)$ genom att...

a) ...först identifiera värdet på v med hjälp av vinkeltabellen.

Den vinkel v , som uppfyller att $\sin(v) = \frac{1}{2}$ och är mellan 0° och 90° är 30° .

$$\text{Då är } 2v = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$$

$$\sin(2v) = \sin(60^\circ) = [\text{Tabellen}] = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

b) ...använda dubbla vinkeln för sinus.

$$\sin(2v) = 2 \cdot \sin(v) \cdot \cos(v)$$

$$\sin(v) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos(v) = \sqrt{1 - \sin^2(v)} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

OBS! I detta fall kan $\cos(v) = \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
även för direkt via tabellen

$$\sin(2v) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

2. Visa att $(\sin(x) + \cos(x))^2 = \sin(2x) + 1$

$$\text{VL} = (\sin(x) + \cos(x))^2 = [\text{kvadreringsregel}] =$$
$$= \sin^2(x) + 2\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x) =$$

$$[\text{Trig. ettan}] = 1 + 2\sin(x)\cos(x) =$$

$$= [2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)] = 1 + \sin(2x) = \text{HL}$$

VSV.

3. För en vinkel, v , gäller att $\cos(v) = \frac{3}{5}$.

a) Bestäm det exakta värdet av $\cos(2v)$

$\cos(2v)$ kan skrivas på flera sätt. Använd den variant som bara innehåller $\cos(v)$, dvs $\cos(2v) = 2\cos^2(v) - 1$

$$\cos(2v) = 2 \cdot \cos^2(v) - 1 = 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = 2 \cdot \frac{9}{25} - \frac{25}{25} = \boxed{-\frac{7}{25}}$$

b) Bestäm värdet av $\sin(2v)$ genom att använda svaret i a)

Vet $\cos(\quad)$, ska bestämma $\sin(\quad) \Rightarrow$ Trig. ettan.

$$\begin{aligned} \sin(2v) &= \sqrt{1 - \cos^2(2v)} = \sqrt{1 - \left(-\frac{7}{25}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{25^2}{25^2} - \frac{49}{25^2}} = \sqrt{\frac{625 - 49}{25^2}} = \frac{\sqrt{576}}{25} = \boxed{\frac{24}{25}} \end{aligned}$$

c) Bestäm värdet av $\sin(2v)$ genom att använda formeln för dubbla vinkeln för sinus.

$$\begin{aligned} \sin(2v) &= 2 \cdot \sin(v) \cdot \cos(v) = \left[\begin{array}{l} \text{Vet } \cos(v) \\ \text{Behöver } \sin(v) \Rightarrow \text{Trig. ettan} \end{array} \right] = \\ &= \left[\begin{array}{l} \sin(v) = \sqrt{1 - \cos^2(v)} = \\ = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \end{array} \right] = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \boxed{\frac{24}{25}} \end{aligned}$$

4. Visa att $\frac{1}{2} \sin(4x) = \cos(2x) \cdot \sin(2x)$

$$\begin{aligned} VL &= \frac{1}{2} \cdot \sin(4x) = \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot 2x) = \left[\begin{array}{l} \text{Dubbla} \\ \text{vinkeln} \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin(2x) \cdot \cos(2x) = \sin(2x) \cdot \cos(2x) = H/L \end{aligned}$$

VSV.

5. För en vinkel, v , som befinner sig i tredje kvadranten gäller att $\cos(v) = -\frac{1}{3}$.

Bestäm exakt värdet av $1 - \sin^2(2v)$

$$1 - \sin^2(2v) = \cos^2(2v) \text{ enl. trig. ettan.}$$

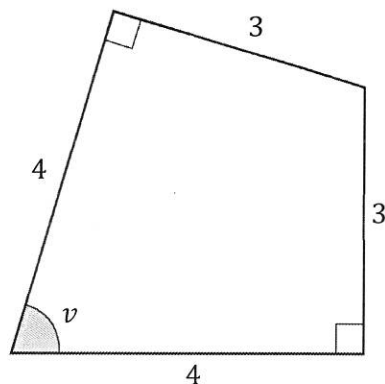
$$\cos^2(2v) = \left(\underbrace{2\cos^2(v) - 1}_{= \cos(2v)} \right)^2 = \left(2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 1 \right)^2 =$$

$$= \left(2 \cdot \frac{1}{9} - \frac{9}{9} \right)^2 = \left(-\frac{7}{9} \right)^2 = \boxed{+\frac{49}{81}}$$

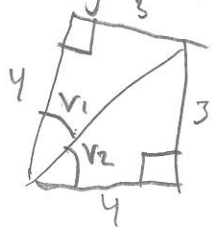
Det går även att gå via att beräkna $\sin(2v)$ istället för $\cos(2v)$

6. Figuren visar en fyrhörning med två räta vinklar och måtten utgivna.

Bestäm med hjälp av figuren det exakta värdet av $\sin(v)$

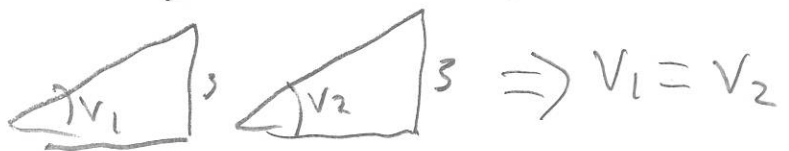


Börja med att skapa två rätvinkliga trianglar genom att dra diagonalen:



$$\Rightarrow v = v_1 + v_2$$

Båda triangelerna har samma mått



$$\sin(v) = \sin(v_1 + v_2) = \left[v_1 = v_2 \right] = \sin(2 \cdot v_1) =$$

$$= \left[\text{Dubbla vinkeln} \right] = 2 \cdot \sin(v_1) \cdot \cos(v_1) = \left[\begin{array}{l} \text{Trig. i rätvinklig} \\ \text{triangel:} \\ \cos(v_1) = \frac{4}{5} \\ \sin(v_1) = \frac{3}{5} \end{array} \right]$$

$$= 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \boxed{\frac{24}{25}}$$

7. Visa att

$$e^{\sin(x)\cos(x)} \leq \sqrt{e}$$

$$\sqrt{e} = e^{0,5} \Rightarrow \text{Vill visa: } e^{\sin(x)\cos(x)} \leq e^{0,5} \Rightarrow$$

$$\sin(x) \cdot \cos(x) \leq 0,5$$

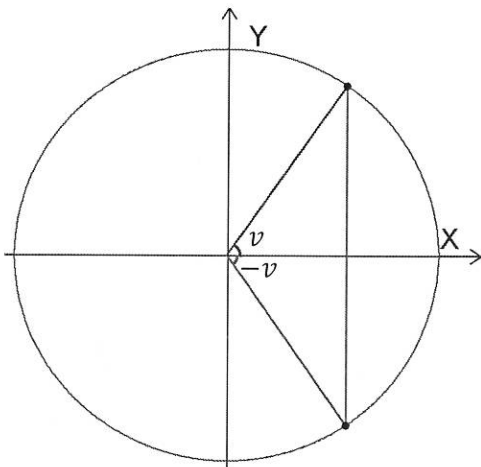
$$VL = \sin(x) \cdot \cos(x) = \left[\begin{array}{l} \text{Dubbla} \\ \text{vinkeln} \end{array} \right] = \frac{1}{2} \sin(2x)$$

$$\sin(2x) \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \sin(2x) \leq \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} = HL \quad \text{VSV.}$$

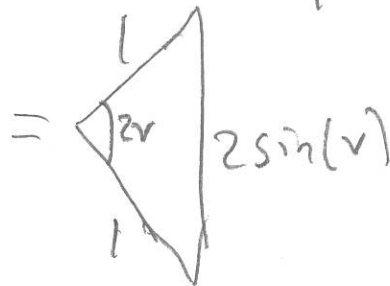
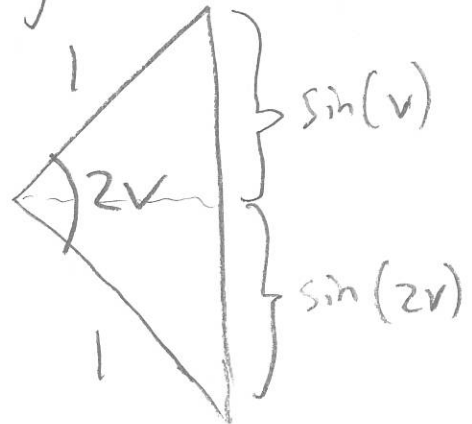
(amplituden = 1)

8. Figuren visar en enhetscirkel med en inritad triangel.

Använd figuren för att tillsammans med cosinussatsen härleda formeln $\cos(2v) = \cos^2 v - \sin^2 v$



Triangeln har måtten:



cosinussatsen:

$$(2\sin(v))^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(2v)$$

$$4\sin^2(v) = 2 - 2 \cdot \cos(2v) \quad \left[\begin{array}{l} \text{Dela med} \\ 2 \end{array} \right]$$

$$2\sin^2(v) = 1 - \cos(2v)$$

$$\cos(2v) = 1 - 2\sin^2(v) =$$

$$= \cos^2(v) + \sin^2(v) - 2\sin^2(v)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Lös ut} \\ \cos(2v) \end{array} \right]$$

trig. ettan:
 $1 = \cos^2(v) + \sin^2(v)$

$$\boxed{\cos(2v) = \cos^2(v) - \sin^2(v)}$$